

Schnelle und genaue Methode zur Schwerpunktfindung in Messreihen

042 Eckhard Weißhaar, Numatec GmbH; Gerd Küveler, Fachhochschule Wiesbaden
 Michele Bianda, Istituto Ricerche Solari Locarno

Bei optischen Messungen, z.B. mit einer Zeilen- oder Matrix-CCD, geht es häufig darum, den Schwerpunkt der Messreihe zu bestimmen. Das kann beispielsweise die Lage einer Spektrallinie sein. Unser Problem bestand darin, die Position der Sonnenmitte auf einem zweidimensionalen Positionssensor festzulegen. Dieser besteht aus 2 x 64 lichtempfindlichen Streifen, die auf zwei transparenten Folien, um 90° gegeneinander gedreht, aufgebracht sind (Bild 1, links). Letztlich erhält man jeweils 64 Streifen in horizontaler und in vertikaler Richtung. Beleuchtet man den Sensor etwa mit einem Laser, erhält man zwei Intensitätsverteilungen in beiden Richtungen (X, Y), aus deren Schwerpunkt man die Position des Lasers oder des Werkstücks, auf dem er als „Zeiger“ aufgebracht ist, ermitteln kann. Vorteil: Man muss lediglich 128 Messwerte auswerten und nicht 64 x 64, wie im Fall einer vergleichbar genauen Dioden-Matrix. Unsere Aufgabe bestand im Bau eines Nachführautomaten für Sonnenteleskope. Abgebildet wird statt eines Laserspots ein stark verkleinertes, aus dem Teleskop ausgespiegeltes, optisch miserables Bild der Sonnenscheibe. Eine genauere Beschreibung des Sensors und des gesamten Projekts findet man unter [1].

In der vorliegenden Arbeit geht es uns ausschließlich um das Problem der Ermittlung von Schwerpunkten von Profilen, vergleichbar den beiden in Bild 1 (rechts) gezeigten Intensitätskurven unseres Sensors. Weil diese Aufgabe in der damaligen Anwendung einem Mikrocontroller zufiel, galt es, einen nicht nur möglichst genauen, sondern auch wenig rechenintensiven Algorithmus zu entwickeln. Er wurde erstmals in *Solar Physics* [2] kurz beschrieben. Diese Zeitschrift ist jedoch nur einem engen Leserkreis zugänglich. Zusätzlich wurde der Algorithmus auf ein zweidimensionales Intensitätsmuster (z.B. Lichtfleck (spot) auf Matrix-CCD) erweitert. Sowohl den ein- wie auch den zweidimensionalen Fall haben wir in Visual Basic als Excel-Anwendung programmiert. Zusammen mit entsprechenden Beispiel-Messdaten kann das Programm von der unten angegebenen Internet-Seite der Firma *Numatec* heruntergeladen werden. Die Umsetzung in eine beliebige Programmiersprache ist damit auch für mathematisch weniger geschulte Programmierer leicht durchführbar. Da unser Verfahren sehr schnell und wenig störanfällig ist, eignet es sich auch für eine Echtzeit-„Zielverfolgung“.

1 Klassische Methoden der Schwerpunktermittlung

Als grober Schwerpunktersatz in einem Profil wie in Bild 1 bietet sich der maximale Messwert an. Dieser ist aber bestenfalls so genau wie die Auflösung der Messpunkte. Dies reicht für höhere Ansprüche nicht aus. Verwendet man dagegen die Informationen, die im gesamten Profil enthalten sind, erhält man ein um Größenordnungen genaueres Resultat.

Die einfachste bekannte Methode der Schwerpunktermittlung in einer Messreihe ist das Schwerpunktverfahren: Der Begriff Schwer-

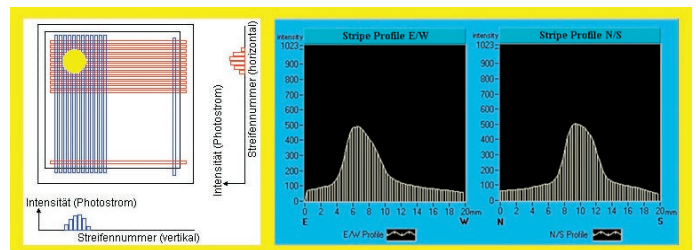


Bild 1: Prinzip des Streifensensors (links) und Intensitätsprofil der optisch schlecht abgebildeten Sonnenscheibe in X- und Y-Richtung auf diesem zweidimensionalen digitalen Positionssensor

punkt stammt aus der Physik. Ein Körper verhält sich in einem Kraftfeld so, als wäre seine gesamte Masse im Schwerpunkt vereinigt. Der Schwerpunkt repräsentiert damit die Position eines Körpers. Dieses Konzept taugt gleichfalls zur Bestimmung der Position einer Spektrallinie oder allgemein eines Profils, wenn dieses Profil als Massenverteilung interpretiert wird.

Ein bedeutender Nachteil dieses Verfahrens besteht in der starken Gewichtung der Randwerte. Vor allem bei stärker verrauschten Daten führt dies zu größeren Verfälschungen. Ist das Profil, dessen Schwerpunkt gesucht wird, am Rand der Messreihe teilweise abgeschnitten (wie in Bild 3), so ist das Verfahren kaum noch anwendbar, da es in keiner Weise symmetrisiert.

Als weitere klassische Methode käme ein Gauß-Fit in Frage; eine sehr genaue Methode, wenn das Profil annähernd die Form einer Gauß-Glocke hat, wie das beispielsweise bei einer Spektrallinie häufig der Fall ist. Neben dieser Einschränkung gibt es weitere Nachteile: Der Algorithmus ist numerisch aufwendig, und es muss vorweg grob das Profil innerhalb der Messreihe gesucht werden.

2 Das Fourier-Verfahren

Alle diese Nachteile vermeidet das nachstehend beschriebene Fourier-Verfahren. Wir beschreiben es zunächst für den eindimensionalen Fall (Messzeile wie in Bild 1).

Die grundlegende Idee dieses Verfahrens besteht darin, die Messreihe bzw. das Profil in seinen symmetrischen und seinen antisymmetrischen Anteil relativ zur Achse im Koordinatenursprung aufzuspalten. Wenn wir es mit einem symmetrischen Profil zu tun haben, dessen Symmetrieachse nicht mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt, gibt es in der Fourierentwicklung antisymmetrische Komponenten, die sich wegtransformieren lassen, indem wir das Profil um eine geeignete Strecke auf der Koordinatenachse verschieben, d. h. den Koordinatenursprung mit der Symmetrieachse zur Deckung bringen. Durch Berechnung dieser Strecke erhält man die Symmetrieachse und damit die Position des Profils.

Für ein allgemeines (in der Regel asymmetrisches) Profil definieren wir die Position des Profils als den Ort, an dem der antisymmetrische Anteil minimal wird.

Die Aufspaltung des Profils in symmetrische und antisymmetrische Anteile lässt sich effektiv durch eine Fourierdarstellung des Profils erreichen. Dies hat weiterhin den Vorteil, dass hochfrequente Anteile herausgefiltert werden können, da Störungen eines Profils (Rauschen, Randschnitte) meist hochfrequenter Natur sind.

Im folgenden wird der Algorithmus hergeleitet:

Ein (reelles) Profil $f(x)$ sei definiert an $2N$ diskreten Punkten. Dann kann dieses Profil als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$f(x) = \sum_{k=-N}^N C_k e^{2\pi i k x / N} \quad (1)$$

wobei $C_k = a_k + i b_k$ komplexe Fourier-Koeffizienten mit $C_k = C_{-k}^*$ sind. Die Fourierkoeffizienten ergeben sich aus der Fouriertransformation der gemessenen Verteilung. Wenn $f(x)$ symmetrisch zum Ursprung $x=0$ ist, verschwinden die imaginären Anteile von C_k .

Der Term

$$A = \sum_{k=-N}^N (IM[C_k])^2 \quad (2)$$

ist ein Maß für die Asymmetrie der Funktion $f(x)$ in Bezug auf $x=0$. Verschiebt man den Ursprung um die Strecke Δx , d. h. betrachtet man die Funktion $f(x - \Delta x)$, erhält man für das oben definierte Maß A :

$$A(\Delta x) = \sum_{k>0} (IM[C_k e^{-2\pi i k \Delta x / N}])^2 \quad (3)$$

Aus der Minimierung von A bezüglich Δx resultiert die optimale Symmetrieposition relativ zum Ursprung. Bei idealen ungestörten symmetrischen Profilen wie etwa der Gauß-Glocke oder einem Kasten-Profil stellt sich eine Position ein, bei der alle antisymmetrischen Fourierkomponenten verschwinden. Es resultiert eine Fourierentwicklung, die nur symmetrische Schwingungen um den Ursprung enthält. In diesem Fall bestimmt allein schon die Grundschwingung die Symmetrieposition, denn das Maximum der Grundschwingung ist gleichzeitig die Symmetrieachse des Profils. Alle höheren Komponenten sind bezüglich dieser Achse symmetrisch. Daher reicht bei symmetrischen Profilen der Fourier-Koeffizient erster Ordnung aus, um die Symmetrieachse zu bestimmen.

Nun gibt es in der Messtechnik keine idealen Profile, vielmehr überlagern Rauschen und andere Fehler das Profil. Grundsätzlich führen solche Störungen zu einem Fehler in der Berechnung der Symmetrieposition. In vielen Fällen sind diese Störungen hochfrequenter Natur, so dass die Phase der Grundschwingung weitgehend stabil bleibt und die Auswirkungen gering sind. Dies wird von unseren Demonstrationsbeispielen (s.u.) bestätigt. Auch in diesem Fall wird die Symmetrieposition nur aus dem Fourierkoeffizienten erster Ordnung bestimmt. Tatsächlich würde die Mitnahme der höheren Schwingungen das Ergebnis verfälschen, da auf diese Weise die Störungen mathematisch als zum Profil gehörig interpretiert werden würden.

Bei ungestörten asymmetrischen Profilen dagegen sind zur Positionsbestimmung gemäß obiger Definition alle Fourierkomponenten zu berücksichtigen. Wenn dem Profil zusätzlich Störungen überlagert sind, sollten geeignete Spektralfilter angewandt werden, um diese Störungen zu dämpfen. Ein einfacher Filter wäre, Fourierkoeffizienten nur bis zu einer bestimmten Ordnung mitzunehmen. Im folgenden gehen wir von der Axialsymmetrie des ungestörten Profils aus und beschränken uns, wie oben begründet, auf die Grundfrequenz $k=1$.

Es ergibt sich dann aus (3):

$$IM[C_1 e^{-2\pi i \Delta x / N}] = a_1 \sin(2\pi \Delta x / N) - b_1 \cos(2\pi \Delta x / N) = 0 \quad (4)$$

und nach Δx aufgelöst:

$$\Delta x = \frac{N}{2\pi} \left(\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \Phi \right) \quad (5)$$

b_1	a_1	$\Phi \frac{N}{\pi}$
>0	>0	0
$*$	<0	N
<0	>0	$2N$

Es tritt ein Phasenkorrekturterm Φ gemäß **Tabelle 1** auf, der den korrekten Zweig des Arcustangens festlegt.

Der Algorithmus lässt sich aber auch auf eine zweidimensionale Verteilung (Datenmatrix wie in **Bild 2**) erweitern. Hierfür gehen wir aus von der zweidimensionalen Fourier-Dekomposition mit den Koordinaten x, y sowie den Wellenzahlen k_x, k_y :

$$f(x, y) = \sum_{k_x, k_y=-N}^N C_{k_x, k_y} e^{2\pi i (k_x \cdot x + k_y \cdot y) / N} \quad (6)$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist reell, wenn für die Fourierkoeffizienten gilt: $C_{k_x, -k_y} = C_{-k_x, k_y}^*$ sowie $C_{k_x, -k_y} = C_{k_x, k_y}^*$. Analog zum eindimensionalen Fall lässt sich nun ein Maß für die Asymmetrie der Funktion $f(x - \Delta x, y - \Delta y)$ definieren:

$$A(\Delta x, \Delta y) = \sum_{\substack{k_x, k_y \geq 0 \\ k_x + k_y > 0}} (IM[C_{k_x, k_y} e^{-2\pi i (k_x \Delta x + k_y \Delta y) / N}])^2 + \sum_{\substack{k_x, k_y > 0}} (IM[C_{k_x, -k_y} e^{-2\pi i (k_x \Delta x - k_y \Delta y) / N}])^2$$

Auch hier werden nur die Fourierkoeffizienten 1. Ordnung $C_{1,0}$ und $C_{0,1}$ berücksichtigt. Gleichung (7) reduziert sich auf

$$A(\Delta x, \Delta y) = (IM[C_{1,0} e^{-2\pi i \Delta x / N}])^2 + (IM[C_{0,1} e^{-2\pi i \Delta y / N}])^2 \quad (8)$$

Minimierung von (8) bezüglich Δx und Δy führt zur Entkopplung der beiden Koordinaten

$$IM[C_{1,0} e^{-2\pi i \Delta x / N}] = 0 \quad (9a)$$

$$IM[C_{0,1} e^{-2\pi i \Delta y / N}] = 0 \quad (9b)$$

Die Bestimmung von Δx und Δy einschließlich der Phasenkorrektur erfolgt analog zu den Schritten in (4) und (5), wobei die komplexen Konstanten $C_{1,0}$ und $C_{0,1}$ als bekannt vorausgesetzt werden.

Im nächsten Schritt könnte man zusätzlich die Koeffizienten $C_{1,1}$ und $C_{1,-1}$ berücksichtigen. Die Entkopplung der Koordinaten ist dann aufgehoben. Diese Terme dürften aber erst dann zusätzlichen Gewinn bringen, wenn das Profil stark von der Axialsymmetrie abweicht.

3 Ein praktisches Beispiel

Mit einer CCD-Kamera wurde das Bild eines diffusen Lichtspots aufgenommen und mit 8 Bit Tiefe digitalisiert (**Bild 2**). Zur Einbrin-

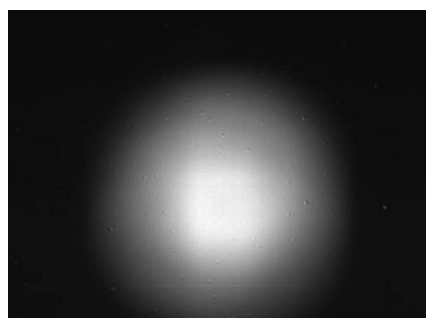


Bild 2: CCD-Aufnahme eines diffusen Lichtspots. Wie bestimmt man den Schwerpunkt?

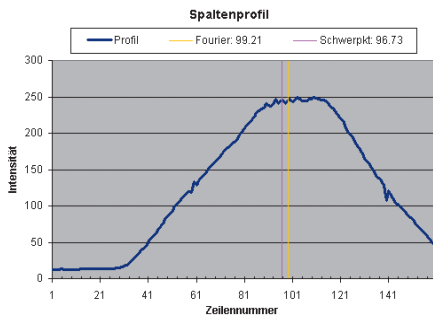


Bild 3: Schnitt durch einen zweidimensionalen Lichtspot (Spaltenprofil aus Bild 2 in Excel-Darstellung)

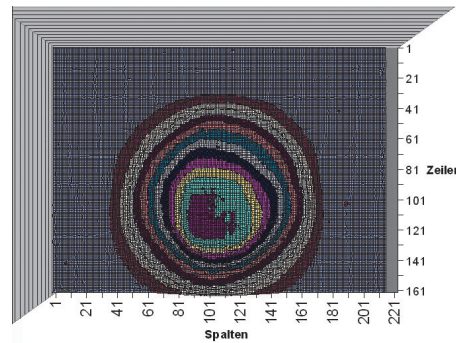


Bild 4: Iso-Linien Excel-Darstellung der Intensitätsverteilung des Lichtspots aus Bild 2

gung in eine Excel-Datei wurde die Anzahl der Spalten auf 214, die der Zeilen auf 161 reduziert. Wenn Sie unsere Excel-Anwendung herunterladen (www.numatec.de/fourier.html), können Sie sich mit dem Algorithmus näher vertraut machen. Mit den Pfeilen lassen sich Zeilen- und Spaltenprofile auswählen. Die Werte der Schwerpunktberechnung nach dem herkömmlichen Verfahren und unserem Fourier-Verfahren werden unmittelbar in der Legende angezeigt.

Bild 3 zeigt das Profil der 100. Spalte. Man erkennt, dass das Profil am rechten Rand abgeschnitten ist. Das Schwerpunktverfahren liefert als Ergebnis 96,731, das eindimensionale Fourier-Verfahren dagegen 99,206, was der Wahrheit sichtbar eher entspricht. Noch eklatanter ist der Unterschied, wenn man ein kaum eingesenktes Profil, etwa Spalte 52, auswählt. Bei den Zeilenprofilen sind die Differenzen insgesamt geringer, weil die Profile recht symmetrisch sind und etwa in der Mitte der Messreihen liegen. Fazit: je gestörter die Profile, desto größer die Vorteile des Fourier-Verfahrens aufgrund des Filtereffekts.

Die komplette zweidimensionale Intensitätsverteilung in Iso-Linien-Darstellung zeigt **Bild 4** (Ausschnitt aus der Excel-Datei). Hier liefert die sinngemäße Anwendung der Schwerpunktmethode (Zeile 94,532, Spalte 105,945), das zweidimensionale Fourier-Verfahren dagegen (100,538 / 106,764), ein offensichtlich besseres Ergebnis, vor allem bezüglich der Zeilenkoordinate. Die Ursache liegt wiederum in den unten „abgeschnittenen“ Spalten. Auch diese Rechnung können Sie mit unserem Excel-Blatt selbst nachvollziehen. Durch Drücken von <Alt><F11> erhält man Zugang zum Programmcode.

In praktischen Anwendungen können unter Umständen Vorbearbeitungen notwendig sein: Falls eine Messreihe eingesenkte Profile, z.B. Absorptionslinien, aufweist, müssen die Daten zuvor gespiegelt werden. Liegen mehrere Profile in einer Messreihe, ist das gesuchte zunächst grob vorzubestimmen (anhand des Maximalwerts und der ungefähren Profillbreite). Die Störprofile sind zu eliminieren, indem die entsprechenden Messwerte auf das allgemeine Grundniveau gesetzt werden.

Literaturhinweise:

- [1] G. Küveler, E. Wiehr, M. Bianda: *Eine sensorgestützte Computersteuerung für Sonnenteleskope*. Automatisierungstechnische Praxis atp 42(2000) Heft 7, S. 50-54
- [2] G. Küveler, E. Wiehr, D. Thomas, M. Harzer, M. Bianda, P. Sütterlin, A. Epple, E. Weißhaar: *Automatic Guiding of Solar Telescope's Primary Image*. Solar Physics 182, 247-255 (1998)
- [3] G. Küveler, R. Klein, M. Bianda: *Einsatz industrieller Bildverarbeitung in der Grundlagenforschung*, Photonik 2/2003, S. 66-68



Dr. Eckhard Weißhaar www.numatec.de **Prof. Gerd Küveler** www.mnd-umwelttechnik.fh-wiesbaden.de/prof/kuveler **Dr. Michele Bianda** www.irsol.ch

Ansprechpartner:

Dr. Eckhard Weißhaar
 NUMATEC Umweltanalytik u. technische Software GmbH
 Auxonner Str. 53
 D-55262 Heidesheim
 Tel. 06132/95225-0
 Fax 06132/95225-5
 eMail: numatec@t-online.de
 Internet: www.numatec.de

ANZEIGE(N)